Computer Science Faculty
Damascus University
MS.c Software Engineering and Information Systems

Markov Chains

Amjad Y.Mahfoud and Mouhammad Wardeh

amjadoof@gmail.com

مقدمة

- جل دراستنا للاحتمالات تعاملنا مع تجارب عشوائية مستقلة, تعتبر اساس نظرية الإحتمالات الكلاسيكية والاحصاء.
- عندما تشكل سلسلة من التجارب إجرائية مستقلة يكون الخرج المتوقع لكل تجربة متماثلا, كما ان معرفة خرج تجربة لا يؤثر على التنؤ بخرج التجربة التالية, يعتبر التوزيع الاحتمالي لتجربة واحدة كافيا وممثلا لكل التجارب الاخرى.
- تدرس نظرية الاحتمالات الحديثة تجارب الحظ حيث يؤثر خرج تجربة سابقة على خرج التجربة التالية,عندما نلاحظ سلسلة من التجارب ، كل من النتائج الماضية يمكن أن تؤثر على توقعاتنا للتجربة المقبلة. على سبيل المثال، ينبغي أن يكون هذا هو الحال في التنبؤ بدرجات الطالب على سلسلة من الامتحانات في الدورة.
- في عام 1907، بدأ ماركوف دراسة نوع جديد مهم من التحارب. وفي هذه العملية، يمكن أن تؤثر نتيجة تجربة معينة على نتيجة التجربة التالية. ويسمى هذا النوع من العملية سلسلة ماركوف.
- . في عام 1907، بدأ ماركوف دراسة نوع جديد مهم من عملية الصدفة. وفي هذه العملية، يمكن أن تؤثر نتيجة تجربة معينة على نتيجة التجربة التالية. ويسمى هذا النوع من العملية سلسلة ماركوف.

إجرائية ماركوف:

نقول عن الـ $\{X(t), t \in T\}$ stochastic process انها اجرائية ماركوف عندما يكون من اجل كل مجموعة نقاط من n+1 عنصر بالشكل التالي $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1}$ (مجموعة الفهرس index set) ومجموعة الحالات states المكونة من n+1 عنصر كالتالي $\{X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}\}$

$$P[(X(t_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1} \ldots\ldots X(t_1) = x_1] = P[(X(t_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(t_n) = x_n]$$

- يعتمد مستقبل الاجرائية على الحالة الحالية فقط دون النظر لتاريخ الاجرائية.
- تدعى إجرائية ماركوف بسلسلة ماركوف Markov chain في حال كان فضاء الحالة الخاص بها منتهياً.

سلاسل ماركوف المتقطعة في الزمن -Discrete Time Markov Chains:

هي stochastic process {X (t),t∈T} بمجموعة فهرس N وفضاء حالة متقطع I.

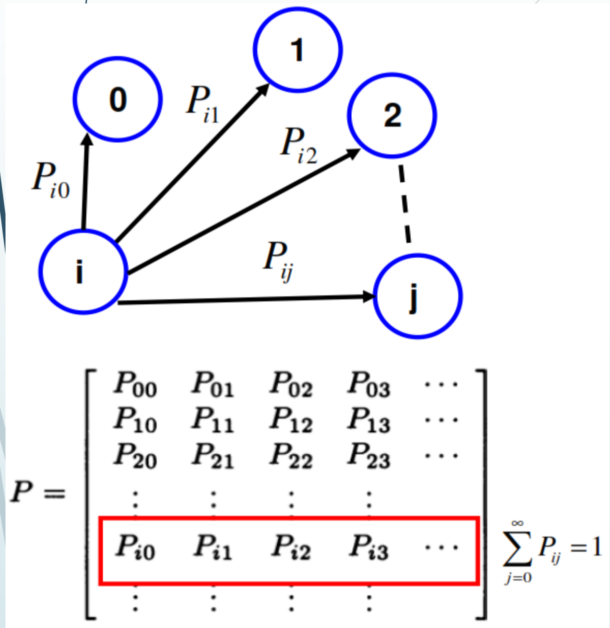
$$P[(X_{n+1}=j\,|\,X_n=i,\;X_{n-1}=i_{n-1}\ldots\ldots,X_0=i_0]=P[X_{n+1}=j\,|\,X_n=i]$$

من المثمر التفكير بالاجرائية كانتقال بين الحالات في الاوقات (.. . . tn, n=1, 2, 3, من الممكن ان يكون الانتقال الى نفس الحالة).

احتمال الانتقال خطوة واحدة :

$$P[(X_{n+1}=j\,|\,X_n=i]\quad n,i,j=0,1,2\ldots$$

سلاسل ماركوف المتجانسة زمنيا Time homogeneous Markov Chains:



- يقال ان سلاسل ماركوف ذات اجتماليات انتقال ثابته (متجانسة زمنياً) عندما يكون احتمال انتقال الخطوة الواحدة مستقل عن الزمن n.
- Pij احتمال الانتقال من الحالة i الى الحالة j بخطوة واحدة:

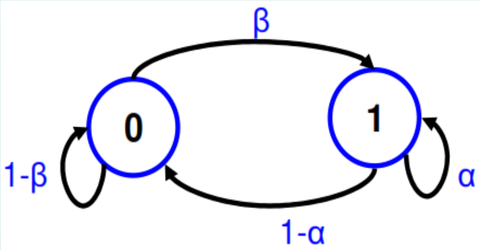
$$P[(X_{n+1} = j \mid X_n = i] = P_{ij},\ n, i, j = 0,1,2...$$

- أو احتمالية كون النظام في الحالة j في اللحظة n+1 علما انه كن في الحالة i في اللحظة n.
- في حال كان عدد حالات سلسلة ماركوف محدود n يوجد مصفوفة احتمالات الانتقالات من البعد nxn.

مثال حالة الطقس:

- بفرض احتمال المطر غداً يعتمد على ظروف طقس سابقة فقط من خلال كونها تمطر اليوم أو لا بغض النظر عن الظروف السابقة.
- بفرض انها امطرت اليوم فستمطر غداً باحتمال α وفيمالو لم تمطر اليوم فإنها ستمطر غدا باحتمال β اوجد transition probability matrix:
- انها سلسلة ماركوف من حالتين 0 غير ممطرة و 1 ممطرة.

$$P = \begin{bmatrix} 1-\beta & \beta \\ 1-\alpha & \alpha \end{bmatrix}$$



مثال تحويل اجرائية إلى سلسلة ماركوف:

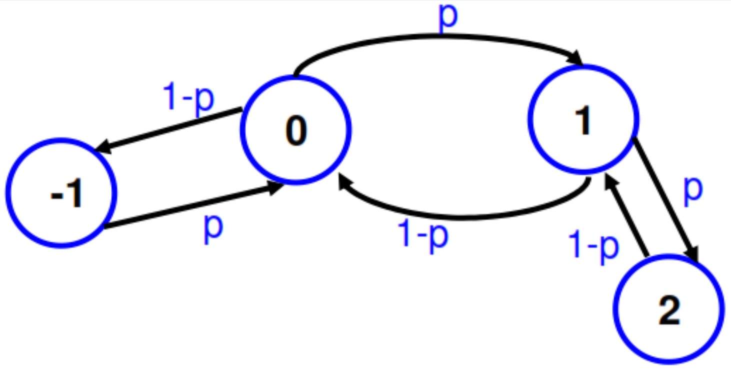
- بفرض انها امطرت في اليومين الماضيين فانها ستمطر غدا باحتمال 0.7
- إذا امطرت اليوم ولم تمطر بالامس فستمطر غدا باحتمال 0.5
- امطرت يالامس ولم تمطر اليوم فستمطر غدا باحتمال 0.4
- إذا لم تمطر في اليومين الماضيين فستمطر غدا باحتمال 0.2

$$P = \begin{Vmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{Vmatrix}$$

- state 0 if it rained both today and yesterday,
- state 1 if it rained today but not yesterday,
- state 2 if it rained yesterday but not today,
- state 3 if it did not rain either yesterday or today.

مثال Random Walk Model:

- يقال عن سلسلة ماركوف بحالات ...,i =0,±1,±2 أنها random walk اذا وجد من اجل رقم $0<p<1$.



$$P_{ii+1} = p \qquad 0,\pm1,\pm2,\dots\dots$$

$$P_{ii-1} = 1 - p$$

مثال player Model:

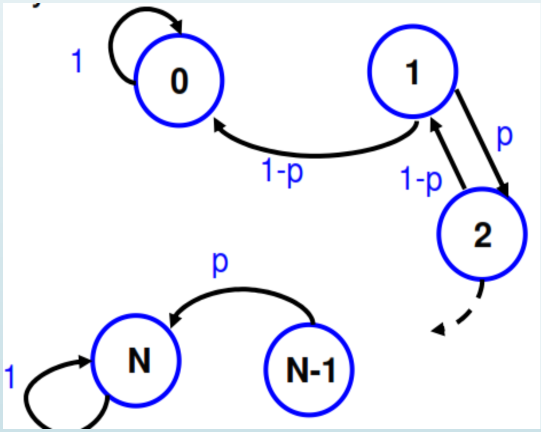
- بفرض لاعب في كل مرحلة من اللعب يربح دولار واحد باحتمال p أو يخسر دولار باحتمال 1- p غذا فرضنا ان اللاعب ينهى اللعب عندما بفلس أو يربح N دولار يمثل هذا الامر بسلسلة ماركوف لها مصفوفة الانتقال التالية:

$$P_{ii+1} = p$$

$$1,2,....N-1$$

$$P_{ii-1} = 1 - p$$

$$P_{00} = P_{NN} = 1$$

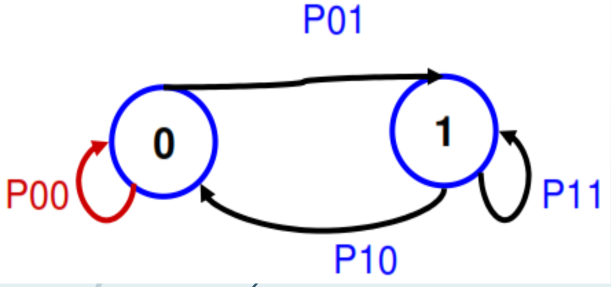


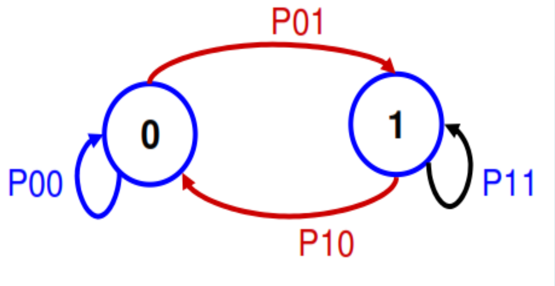
- تدعى الحالات 0 و N بالحالات الماصة اذ حالما يدخل اليها لا يمكن الخروج منها.

معادلات Chapman–Kolmogorov:

- عرفنا مسبقا احتمالات الانتقال بخطوة واحدة Pij, بالعودة للمثال 2 ما هو احتمال الوصول من الحالة 0 لنفسها بعد حركتين

$$P_{00}^{(2)} = ?$$





$$P(X_2=0|X_0=0) = P\begin{pmatrix}(X_1=0|X_0=0 \cap X_2=0|X_1=0) \\ \cup(X_1=1|X_0=0 \cap X_2=0|X_1=1)\end{pmatrix}$$

$$= P_{00}P_{00} + P_{01}P_{10}$$

$$P^2 = \left(\begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix}\right)^2 = \begin{bmatrix} P_{00}^{\ 2} + P_{01}P_{10} & P_{00}\,P_{01} + P_{01}P_{11} \\ P_{10}\,P_{00} + P_{11}P_{10} & P_{10}\,P_{01} + P_{11}^{\ 2} \end{bmatrix}$$

- احتمال الانتقال ب n خطوة هو احتمالية الانتقال من الحالة i للحالة j ب n خطوة.

$$P_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i) \quad n, i, j = 0,1,2...$$

- يمكن الحصول على مصفوفة الانتقال من المرتبة n عن طريق رفع مصفوفة الانتقال بخطوة واحدة للمرتبة n.

$$P^{(n)} = P^n$$

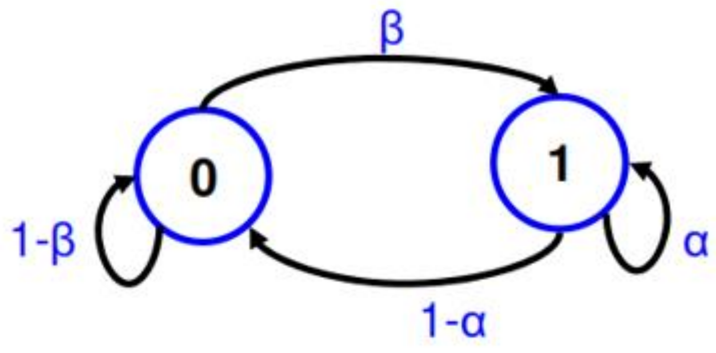
مثال:

- بالعودة للمثال المتعلق بالطقس, وفي حال كانت $\alpha=0.7$ و$\beta=0.4$, ما احتمال عدم هطول المطر بعد اربعة ايام من الان مع العلم انها لا تمطر اليوم؟

$$P^{(4)} = P^4 = P^2 P^2$$

$$P^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.4332 & 0.5668 \\ 0.4251 & 0.5749 \end{bmatrix}$$

$$P_{00}^{(4)} = 0.4332$$



التوزيع الاحتمالي غير المشروط Unconditional probability distribution:

- لحد الان كنا نتعامل مع احتمالية مشروطة $P_{ij}^{(n)}$ كيف يمكن حساب احتمال كون النظام في الحالة j في اللحظة n دون معرفة الحالة البدائية؟

$$P(X_n = j) = ?$$

- يجب تحديد التوزيع الاحتمالي الابتدائي للحالات كافة.

$$P(X_0 = i) = \pi_0(i)$$

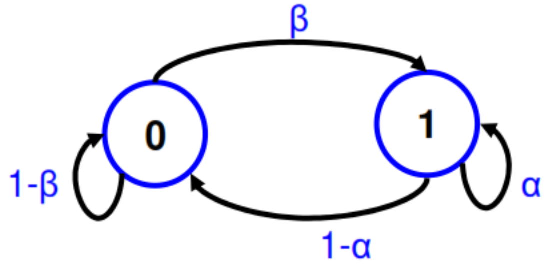
$$P(X_1 = j) = ?$$

$$P(X_1 = 1) = P(X_0 = 0).P(X_1 = 1 \mid X_0 = 0) + P(X_0 = 1).P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1)$$

$$P(X_1 = 1) = \pi_0(0).P_{01} + \pi_0(1).P_{11}$$

$$P(X_1 = 1) = \sum_{i=0}^{1} \pi_0(i).P_{i1}$$

$$P(X_1 = 1) = \pi_0(0).\beta + \pi_0(1).\alpha$$



Unconditional التوزيع الاحتمالي غير المشروط 2:probability distribution

$$P(X_n = j) = ?$$

$$P(X_n = j) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X_0 = i).P(X_n = j \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \pi_0(i) P_{ij}^{(n)}$$

$$P(X_n = j) = [\pi_0(0), \pi_0(1), ...] \left(\begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & ..... & P_{0j} & .... \\ P_{10} & P_{11} & ..... & P_{1j} & .... \\ . & & & & \\ . & & & & \\ P_{i0} & P_{i1} & ..... & P_{ij} & .... \\ . & & & & \\ . & & & & \end{bmatrix} \right)^n$$

- يمكن الحصول على النتيجة بضرب الشعاع π بالعمود رقم j من المصفوفة $P^{(n)}$

مثال:

- يفرض مجموعة من الكرات موزعة بشكل متتالي على ثمان جرار 8 مع كون كل كرة متساوية الاحتمال لأن توضع في أي جرة من الجرار, ما هو احتمال وجود ثلاث جرار غير فارغة بعد توزيع 9 كرات؟

- p=[0 1 0 0 0 0 0 0 0;
  0 1/8 7/8 0 0 0 0 0 0;
  0 0 2/8 6/8 0 0 0 0 0;
  0 0 0 3/8 5/8 0 0 0 0 ;
  0 0 0 0 4/8 4/8 0 0 0 ;
  0 0 0 0 0 5/8 3/8 0 0 ;
  0 0 0 0 0 0 6/8 2/8 0 ;
  0 0 0 0 0 0 0 7/8 1/8 ;
  0 0 0 0 0 0 0 0 1]
- [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]*p^9=
  0 0.0000 0.0001 0.0076 0.0973 0.3480 0.3974 0.1388 0.0108

تصنيف الحالات Classification of States:

- حالات يمكن الوصول لها Reachable (accessible) state:
  - يقال عن الحالة j انها قابلة للوصول من الحالة i عندما:

$$P_{ij}^{(n)} > 0 \quad for\ some\ n > 0 \qquad i \to j$$

  - عندما يمكن الوصول للحالات i و j من كل منهما يقال انهما على اتصال communicate أي $i \leftrightarrow j$
  - اذا لم يكن الوصول من i الى j يكون

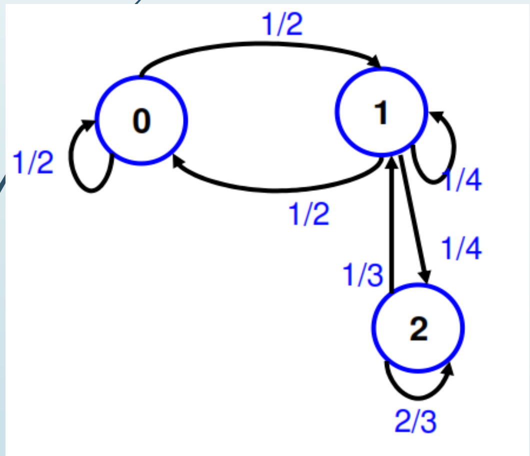
$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)} = 0$$

- يقال عن سلسلة ماركوف انها غير قابلة للتجزيء irreducible غذا كانت جميع حالاتها متصلة ببعضها.
- الحالتان المتصلتان يكونان في صف واحد. وعليه تكون سلسلة ماركوف غير قابلة للتجزيء إذا شكلت جميع جالاتها صف واحد.

مثال:

- لتكن سلسلة ماركوف المكونة من ثلاث حالات 2 ,1 ,0 ولها المصفوفة التالية.
- من الوهلة الاولى قد تعتقد انه لا يمكن الوصول من الحالة 0 للحالة 2.

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{Vmatrix}$$



0➔1 and 1➔2 so 0➔2

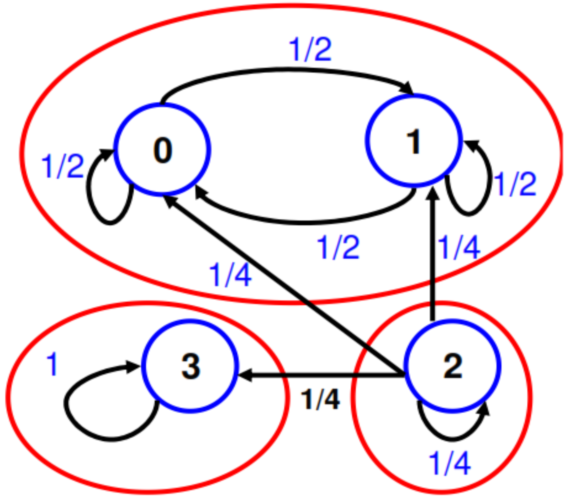
or:

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.3750 & 0.1250 \\ 0.3750 & 0.3958 & 0.2292 \\ 0.1667 & 0.3056 & 0.5278 \end{bmatrix}$$

$P_{ij}^{(2)} > 0$ M.C. is irreducible

مثال :

$$P = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$



- M.C. is not irreducible
- Class 1 S1= {0, 1}
- Class 2 S2= {3}
- Class 3 S3= {2}

- السلسلة هي سلسلة قابلة للتجزيء والحالة 3 تدعى حالة ماصة إذ لا يمكن الانتقال منها لحالة اخرى.

تصنيف الحالات Classification of States: 2

- الحالات الماصة absorbing states:
  - يقال عن الحالة زانها حالة ماصة عندما يكون $P_{jj}=1$
  - حالما يتم الوصول لها لا يمكن المغادرة.

- الحالات الدورية وغير الدورية periodic and aperiodic states:
  - تعرف الحالة الدورية j بكونها $d(j)=\gcd\{n\geq 1: P_{ii}^{(n)}>0\}$
  - اذا كان d(i)>1 فالحالة دورية periodic واذا كان d(i)=1 فالحالة غير دورية aperiodic
  - اذا كان $P_{ii}>0$ فالحالة j غير دورية إذ يمكن للنظام أن يبق فيها فترة غير محددة

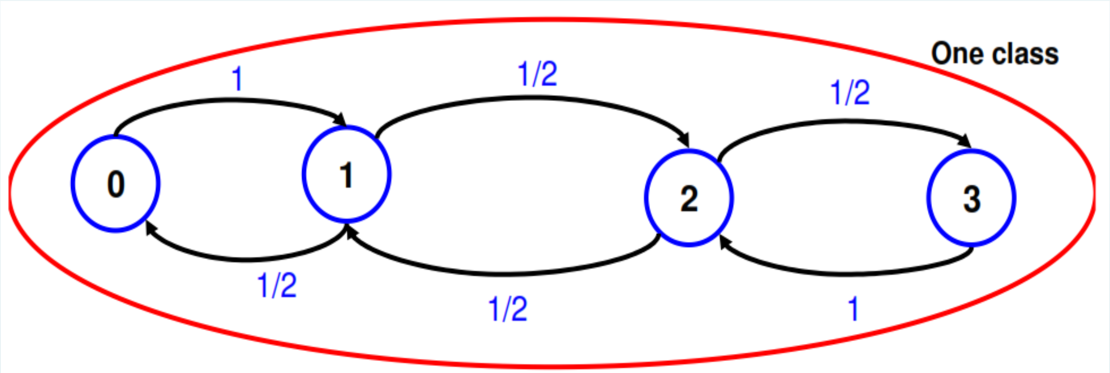
$$if \quad P_{ii}^{(n)}=0 \;\; \forall n \Rightarrow d(i)=0$$

  - يقال عن سلسلة ماركوف انها غير دورية اذا كانت جميع حالاتها غير دورية

Symmetric random walk with reflecting boundaries (ver. 1):

- يسير شخص على طول خط مستقيم وفي كل مرحلة يخطو خطوة لليمين باحتمال 0.5 ولليسار باحتمال 0.5, يبدأ هذا الشخص باحد المواقع التالية: 0, 1, 2, 3 عند وصولة للحالة 0 أو 3 توجه حركته تلقائيا للحالة 1 او 2 باحتمال مكافئ لـ 1.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



- السلسلة متناظرة Symmetric كون احتمال الذهاب إلى أي اتجاة متساوي. ذات حدود انعكاسية Reflecting عند وصول المتحرك لاحد الحواف سوف يرتد مباشرةً.
- غير قابلة للتجزيء Irreducible كونه من الممكن الانتقال من اي حالة للاخرى خلال عدد محدود من النقلات. دورية Periodic بدور gcd{2,4,6,8..}=2

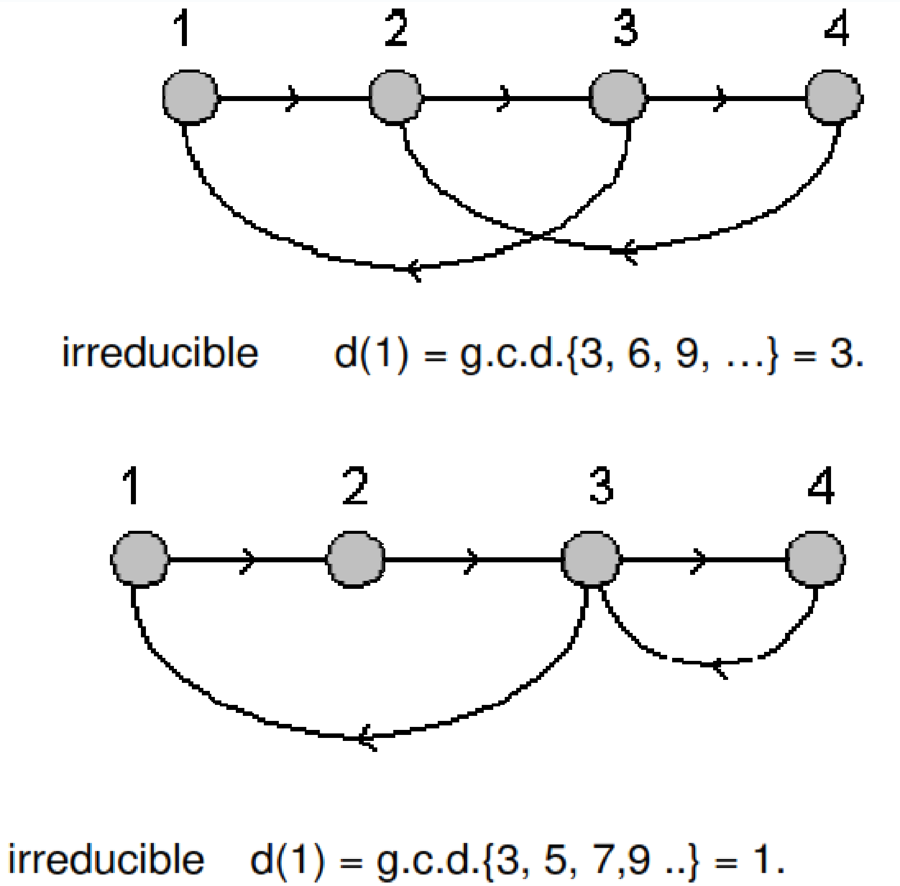
Symmetric random walk (ver. 2):

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- غير قابلة للتجزيء.
- الحالة 0 غير دورية P00>0
- الحالة 1 غير دورية d=gcd{2,3,4..}=1
- الحالة 2 غير دورية d=gcd{2,3.4..}=1
- الحالة 3 غير دورية P33>0
- السلسلة قابلة للتجزيء reducible و غير دورية aperiodic

مثال:

- كل حالة في سلسلة غير قابلة للتجزيء للها نفس الدور.
- سلسلة ماركوف غير القابلة للتجزيء غير دورية في حال كانت احد حالاتها غير دورية.



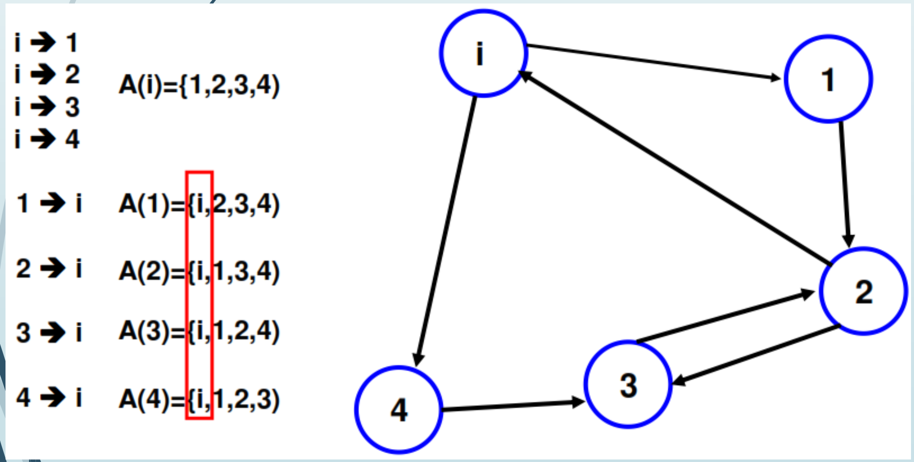
مثال:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

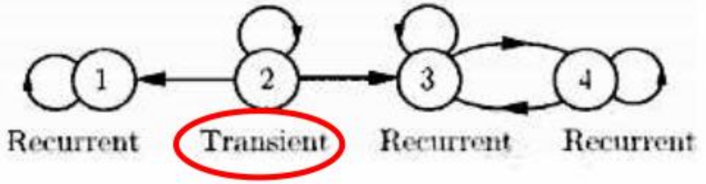
- السلسلة غير قابلة للتجزيء كونه من الممكن الانتقال من اي حالة للاخرى في عدد محدد من الخركات باحتمال غير صفري.
- بما ان $P00>0$ فالحالة 0 غير دورية
- بما ان السلسلة غير قابلة للتجزيء هذا يعني ان كل الحالات غير دورية وبالتالي السلسلة غير دورية وغير قابلة للتجزيء.

تصنيف الحالات Classification of States: 3

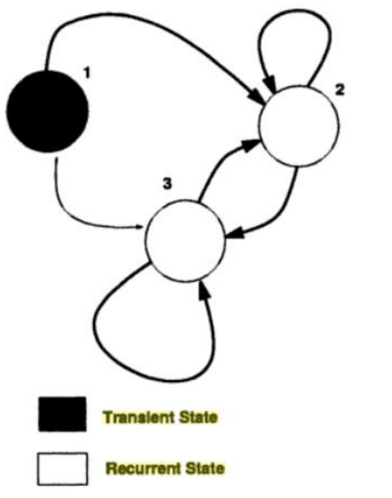
- الحالات المتكررة والعابرة Recurrent and transient States:
  - الحالات المتكررة والعابرة Recurrent and transient States:
  - لتكن A(i) مجموعة الحالات الممكن الوصول لها من الحالة i. نقول عن i أنها حالة متكررة recurrent إذا كان من اجل كل حالة j ممكنة الوصول من i يمكن الوصول منها ايضا للحالة j.
  - ***من اجل كل j منتمية الى A(i) يوجد i تتبع A(j)***
  - اذا تمت زيارة الحالة المتكررة recurrent مرة واحدة فسيتم زيارتها عددا غير محدد من المرات.
  - الحالة i حالة عابرة transient اذا وجدت حالة j تنتمي إلى A(i) لا يمكن منها الوصول للحالة i.
  - الحالة العابرة سيتم زيارتها عددا محددا من المرات فحسب.



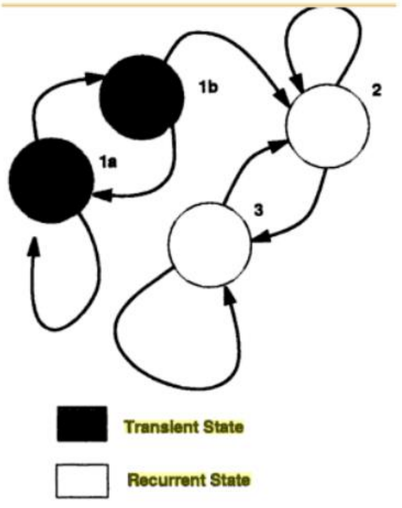
Examples:



: Classification of states given the transition probability graph. Starting from state 1, the only accessible state is itself. and so 1 is a recurrent state. States 1. 3, and 4 are accessible from 2. but 2 is not accessible from any of them. so state 2 is transient. States 3 and 4 are accessible from each other. and they are both recurrent.



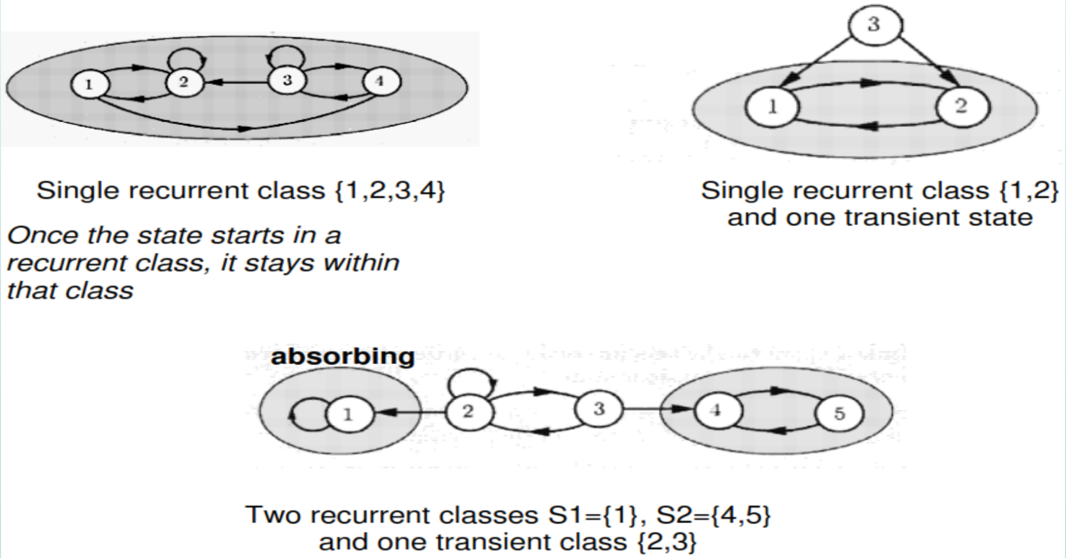
'ure 8.7. A Markov chain with one transient state



'igure 8.8. A Markov chain with two transient s

تفكيك سلاسل ماركوف Markov chains decomposition:

- يمكن تفكيك سلسلة ماركوف إلى صف واحد متكرر على الاقل ومجموعة من الصفوف العابرة
- الحالة المتكررة يمكن الوصول لها من جميع الحالات في صفها لكن لا يمكن الوصول لها من الحالات المتكررة خارج صفها.
- الحالة العابرة لا يمكن الوصول لها من اي حالة متكررة.
- حالة متكررة واحدة على الاقل وربما اكثر يمكن الوصول لها من حالة عابرة.



التوزيع المستقر Stationary Distribution:

- احتمال كون سلسلة ماركوف في الحالة j في الخطوة رقم n يعطى بالعلاقة:

$$P(X_n = j) = \pi_n(j)$$

- التوزع الاولي للحالات ... ,3 ,2 ,1 ,0

$$P(X_0 = j) = \pi_0(j), \quad j = 0,1,2$$

- يقال عن سلسلة ماركوف المتقطعة ان لها توزعاً احتمالياً مستقراً $\pi = \{\pi_0, \pi_1, ...\}$ اذا كانت المعادلة المصفوفية التالية محققة:

$$\pi = \pi P$$

بحيث

$$\pi_j \geq 0 \qquad \pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}, \quad j \geqslant 0, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

$$\pi_0(j) = \pi_n(j) = \pi_j \quad for \ j = 0,1,2....$$

مثال:

- اوجد التوزع الاحتمالي المستقر لسلسلة ماركوف ذات مصفوفة الانتقال التالية:

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$\pi = \pi.P$$

$$[\pi_0 \quad \pi_1] = [\pi_0 \quad \pi_1] \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix}$$

$$[\pi_0 \quad \pi_1] = [\pi_0 \quad \pi_1] \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$\pi_0 = 0.8\pi_0 + 0.6\pi_1$$

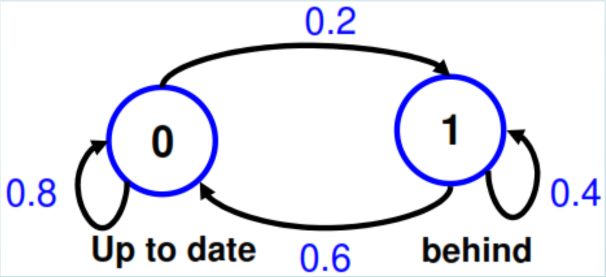
$$\pi_1 = 0.2\pi_0 + 0.4\pi_1$$

$$\pi_0 + \pi_1 = 1$$

$$\pi_0 = \frac{3}{4} \qquad \pi_1 = \frac{1}{4}$$

مثال Alice and probability class:

- تحضر اليس مقررا في الاحتمالات وفي كل اسبوع يمكن ان تكون متابعة up-to-date أو أن تكون متخلفة fallen behind اذا كانت متابعة في اسبوع ما فانها ستكون متابعة في الاسبوع التالي باحتمال 0.8 أو متخلفة باحتمال 0.2 واذا كانت متخلفة ستكون متابعة باحتمال 0.6 او متأخرة باحتمال 0.4.
- بفرض ان الاحتمالات السابقة لا علاقة لها بالحالات في الاسابيع الماضية, لذلك للمشكلة خصائص سلسلة ماركوف المعتادة اعتماد المستقبل على الماضي فقط من خلال الحاضر.
- State 0: up to date
- State 1: behind
- مصفوفة الانتقال:



$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

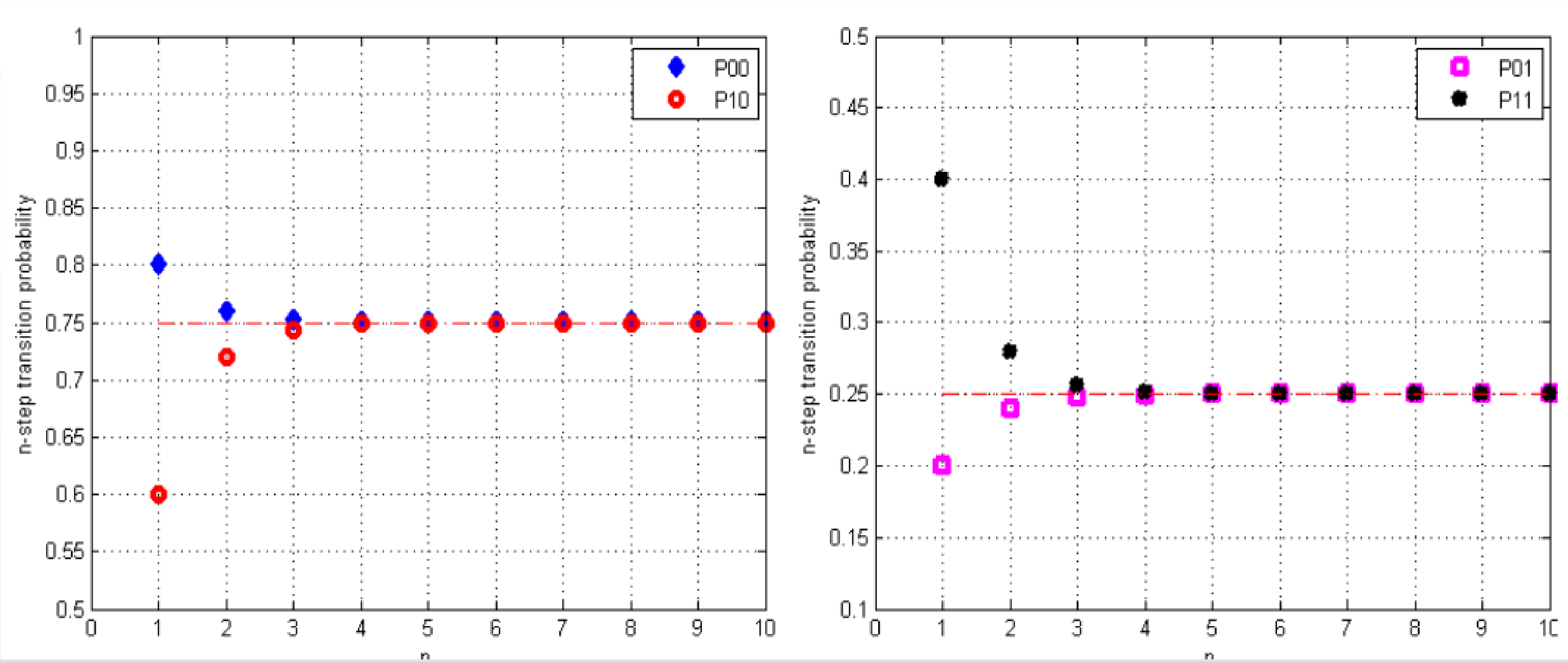
مثال 2: Alice and probability class

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.76 & 0.24 \\ 0.72 & 0.28 \end{pmatrix} \qquad P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.7520 & 0.2480 \\ 0.7440 & 0.2560 \end{pmatrix}$$

$$P^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.7504 & 0.2496 \\ 0.7488 & 0.2512 \end{pmatrix} \qquad P^{(5)} = \begin{pmatrix} 0.7501 & 0.2499 \\ 0.7498 & 0.2502 \end{pmatrix}$$

$$P^{(6)} = \begin{pmatrix} 0.7500 & 0.2500 \\ 0.7500 & 0.2500 \end{pmatrix} \qquad P^{(\infty)} = \begin{pmatrix} 0.7500 & 0.2500 \\ 0.7500 & 0.2500 \end{pmatrix}$$

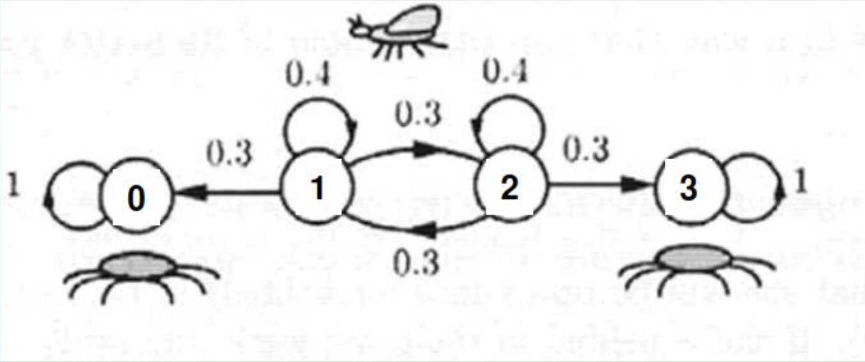
مثال 3: Alice and probability class



- تعتمد الاحتمالية Pijعلى الحالة البدائية أعندما تكون nصغيرة
- خلال وقت طويل نسبيا, يصبح من الممكن التخلي عن تأثير الحالات البدائية
- عندما تسعى Pللانهاية تتقارب $P_{ij}^{(n)}$ إلى نهاية

مثال العناكب والذبابة:

- تتحرك ذبابة على طول خط مستقيم في زيادات موحدة. في كل فترة زمنية تتحرك وحدة لليسار باحتمال 0.3 اووحدة لليمين باحتمال 0.3 وتبقى في مكانها باحتمال 0.4 بشكل مستقل عن تحركاتها االسابقة. يوجد عنكبوت في كل من الموقعين 1 و m. في حال وصول الذبابة لاحدى الموقعين سوف تمسك من قبل العنكبوت وستنتهي الاجرائية كون سلسلة ماركوف على فرض الذبابة تبدأ في احد الموقعين 1 أو m.



	0	1	2	3
0	1.0	0	0	0
1	0.3	0.4	0.3	0
2	0	0.3	0.4	0.3
3	0	0	0	1.0

p_{ij}

مثال العناكب والذبابة 2:

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.00 & 0 & 0 & 0 \\ 0.42 & 0.25 & 0.24 & 0.09 \\ 0.09 & 0.24 & 0.25 & 0.42 \\ 0 & 0 & 0 & 1.00 \end{pmatrix}$$

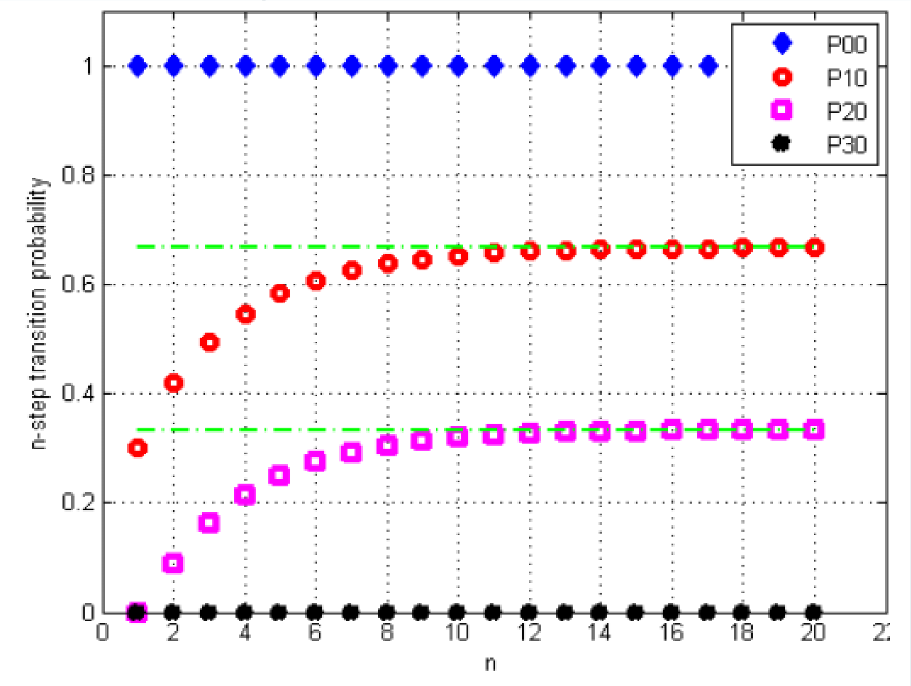
$$P^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.00 & 0 & 0 & 0 \\ 0.49 & 0.17 & 0.17 & 0.16 \\ 0.16 & 0.17 & 0.17 & 0.49 \\ 0 & 0 & 0 & 1.00 \end{pmatrix}$$

$$P^{(4)} = \begin{pmatrix} 1.00 & 0 & 0 & 0 \\ 0.54 & 0.12 & 0.12 & 0.21 \\ 0.21 & 0.12 & 0.12 & 0.54 \\ 0 & 0 & 0 & 1.00 \end{pmatrix}$$

$$P^{(100)} = \begin{pmatrix} 1.00 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6667 & 0 & 0 & 0.3333 \\ 0.3333 & 0 & 0 & 0.6667 \\ 0 & 0 & 0 & 1.00 \end{pmatrix}$$

$$P^{(\infty)} = \begin{pmatrix} 1.00 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6667 & 0 & 0 & 0.3333 \\ 0.3333 & 0 & 0 & 0.6667 \\ 0 & 0 & 0 & 1.00 \end{pmatrix}$$

مثال العناكب والذبابة 3:



- الحالات 0 و 3 هي حالات ماصة عند دخولها ستتكرر بشكل غير منتهي, عند الوصول للحالة 3 فان احتمال الوصول منها للحالة 0 هو 0.
- عندما تسعى n للانهاية:
- تتقارب الاحتمالية Pij لنهاية معتمدة على الحالة البدائية.
- احتمال الوصول الى حالة ماصة معينة تعتمد على مدى القرب منها في البداية, فمثلا الحالة 1 اقرب للحالة 0 من الحالة 2 وعليه P10>P20.
- احتمالية الوجود في الحالات العابرة 1 و 2 تنتهي للصفر (العمودين 2 و 3)

مثال العناكب والذبابة4:

- تخبرنا نهاية الاحتمال $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$ عن سلوك الحالة المستقرة steady-stateأو (long-run) للاجرائية, تعرف احتمالية الحالة المستقرة للحالة زكالتالي:

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j)$$

- تقدم لنا آلية للتنبؤ بعمل النظام الذي تنمذجة الاجرائية بالمعدل المتوسط.
- غذا كانت الحالة هي حالة عابرة فإن هذه النهائة هي المعامل الخاطئ لنسأل عنه لان هذه النهاية هي 0.
- في حال وجود صفين متكررين او اكثر يجب ان تعتمد قيمة $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$ على الحالة البدائية (امكانية زيارة j في المستقبل تعتمد على كونها في نفس صف الحالة البدائية i).
- سلاسل ماركوف التي تتكون من صف متكرر وحيد قد لا تتقارب may fail to converge

Any Questions?